FORCE MAGNÉTIQUE

La force magnétique $\vec{F}_{12}$ exercée par une distribution de courant stationnaire $\vec{J}_1$ à l'intérieur d'un volume V_1 sur une distribution de courant stationnaire $\vec{J}_2$ à l'intérieur d'un volume V_2 est égale en grandeur et opposée en direction à la force $\vec{F}_{21}$ exercée par $\vec{J}_2$ sur $\vec{J}_1$.

<u>Preuve :</u>

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V_2}\int_{V_1}\frac{\vec{J}_2(\vec{r}'')\times\left(\vec{J}_1(\vec{r}')\times\hat{\mathscr{r}}\right)}{\mathscr{r}^2}d\tau' d\tau''$$

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_o}{4\pi}\int_{V_2}\int_{V_1}\frac{\vec{J}_1(\vec{r}')\times\left(\vec{J}_2(\vec{r}'')\times(-\hat{\mathscr{r}})\right)}{\mathscr{r}^2}d\tau' d\tau''$$

où $\vec{\mathscr{r}} = \vec{r}'' - \vec{r}'$.

Mais $\vec{J}_2\times\left(\vec{J}_1\times\hat{\mathscr{r}}\right) = \vec{J}_1\left(\vec{J}_2\cdot\hat{\mathscr{r}}\right) - \hat{\mathscr{r}}\left(\vec{J}_1\cdot\vec{J}_2\right)$ et $\vec{J}_1\times\left(\vec{J}_2\times(-\hat{\mathscr{r}})\right) = -\vec{J}_2\left(\vec{J}_1\cdot\hat{\mathscr{r}}\right) + \hat{\mathscr{r}}\left(\vec{J}_1\cdot\vec{J}_2\right)$. Ces deux expressions ne sont pas égales en grandeur et opposées en direction. Toutefois,

$$\int_{V_1}\int_{V_2}\vec{J}_1(\vec{r}')\left(\vec{J}_2(\vec{r}'')\cdot\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)d\tau' d\tau'' = \int_{V_1}\vec{J}_1(\vec{r}')\left[\int_{V_2}\vec{J}_2(\vec{r}'')\cdot\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\,d\tau''\right]d\tau'$$

et

$$\int_{V_2}\vec{J}_2(\vec{r}'')\cdot\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\,d\tau'' = -\int_{V_2}\vec{J}_2(\vec{r}'')\cdot\vec{\nabla}''\mathscr{r}\;d\tau'' = -\int_{V_2}\vec{\nabla}''\cdot\left(\vec{J}_2(\vec{r}'')\mathscr{r}\right)d\tau'' + \int_{V_2}\mathscr{r}\left(\vec{\nabla}''\cdot\vec{J}_2(\vec{r}'')\right)d\tau''$$

$$= -\int_{V_2}\vec{\nabla}''\cdot\left(\vec{J}_2(\vec{r}'')\mathscr{r}\right)d\tau'' \quad \text{car } \vec{\nabla}\cdot\vec{J}_2 = 0$$

$$= -\oint_{S_2}\vec{J}_2(\vec{r}'')\mathscr{r}\;d\tau'' = 0 \quad \text{car } \vec{J}_2 \text{ est à l'intérieur de } V_2 \text{ !}$$

De même, $\int_{V_1}\int_{V_2}\vec{J}_2(\vec{r}'')\left(\vec{J}_1(\vec{r}')\cdot\frac{\hat{\mathscr{r}}}{\mathscr{r}^2}\right)d\tau' d\tau'' = 0$, d'où il suit que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.